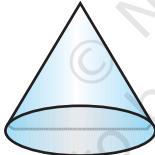
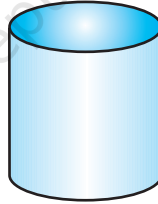
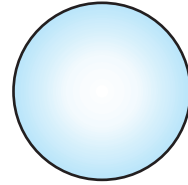
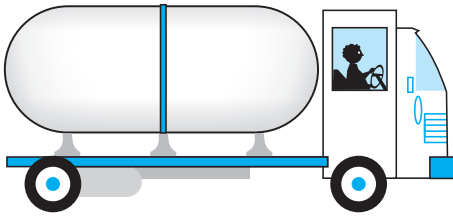
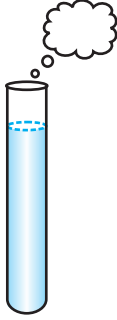
5013CH13

13 سطحی رقبہ اور حجم (SURFACE AREAS AND VOLUMES)

13.1 تعارف

نویں جماعت میں آپ کچھ ٹھوس جیسے، مکعب نما، مخروط، استوانہ اور کرّہ (شکل 13.1 دیکھئے) سے واقف ہو چکے ہیں آپ یہ بھی سیکھ چکے ہیں کہ ان کے رقبہ اور حجم کیسے معلوم کئے جاتے ہیں۔

روزمرّہ کی زندگی میں ہمارا واسطہ بہت سی ایسی ٹھوس اشیا سے پڑتا ہے جو دو یا دو سے زیادہ بنیادی ٹھوس اشیا سے مل کر بنے ہوے ہیں جیسے اوپر دکھائے گئے ہیں۔

آپ نے ایک ٹرک ضرور دیکھا ہوگا جس کے پیچھے مضروف جڑا ہوا ہوتا ہے۔ (شکل 13.2 دیکھئے) جو اس میں تیل یا پانی ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرتا ہے۔ کیا اس کی شکل مذکورہ بالا چار بنیادی ٹھوس اشیا کی شکل میں سے ایک ہے؟ اب اندازہ کر سکتے ہیں کہ یہ ایک ایسے استوانہ کی شکل کا ہے جس کے سرے نصف کرّ وی ہیں۔

شکل 13.2

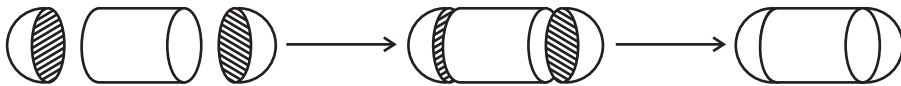
کبھی آپ نے ایسی شے دیکھی ہوگی جیسے شکل 13.3 میں دکھائی گئی ہے۔کیا آپ اس کا نام بتا سکتے ہیں؟ ایک ٹیسٹ ٹیوب ہے! آپ اس کو اپنی سائنس کی لیباریٹری میں استعمال کرتے ہیں۔ یہ ٹیوب بھی استوانہ اور نصف کرہ کے اتحاد کا نتیجہ ہے۔اسی طرح سے سفر کرتے ہوئے آپ نے بہت سی ایسی عمارتیں اور تاریخی یادگاریں دیکھی ہوں گی جو مذکورہ بالا بنیادی ٹھوس شکلوں سے مل کر بنی ہوتی ہیں۔

شکل 13.3

اگر کسی وجہ سے آپ کو ان کا حجم یا سطحی رقبہ معلوم کرنا ہو یا گنجائش معلوم کرنی ہو تو یہ آپ کیسے کریں گے ہم ان کی درجہ بندی پہلے سے پڑھے گئے کسی ٹھوس کے ساتھ نہیں کر سکتے۔

اس باب میں آپ پڑھیں گے کہ تمام شکلوں کا سطحی رقبہ اور حجم کیسے معلوم کئے جاتے ہیں۔

13.2 ٹھوسوں کے اجماع (Combination) کے سطحی رقبہ

آیئے شکل 13.2 میں دکھائے گئے مضروف پر غور کرتے ہیں۔ ایسے ٹھوسوں کا سطحی رقبہ ہم کیسے معلوم کرتے ہیں؟ جب جب ہمارے سامنے ایسا کوئی نیا مسئلہ آتا ہے ہم اس کو پہلے چھوٹے چھوٹے ایسے مسئلے میں توڑ لیتے ہیں جن کو ہم پہلے ہی حل کر چکے ہیں۔ہم دیکھ سکتے ہیں کہ یہ ٹھوس ایک ایسا استوانہ ہے جس کے سرے نصف کروی شکل کے ہیں۔ جب ہم اس کے تمام ٹکڑوں کو ملا کر رکھیں تو یہ ایسا ہی نظر آئے گا جیسا کہ شکل 13.4 میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 13.4

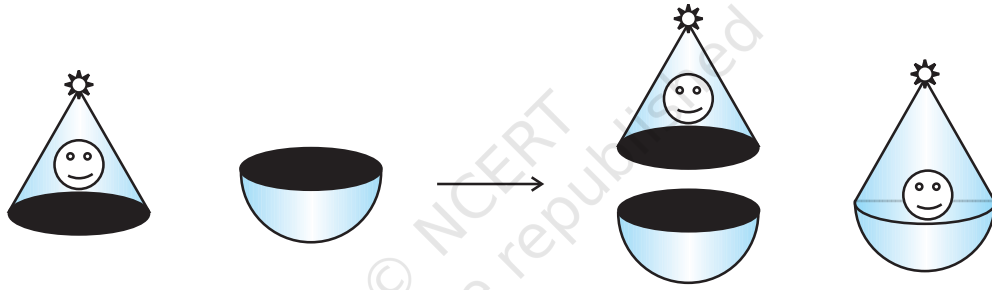
اگر ہم نئے بنے ہوئے ٹھوس کی سطح پر غور کرتے ہیں ہمیں صرف دو نصف کروں کی خمیدہ سطح اور استوانہ کی خمیدہ سطح نظر آتی ہے۔ اس لئے نئے ٹھوس کا کل سطحی رقبہ ہر انفرادی حصہ کی خمیدہ سطح کے رقبوں کا حل جمع ہے۔اس سے ہمیں ملتا ہے۔

نئے ٹھوس کل سطح رقبہ TSA = پہلے نصف کرہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ CAS + استوانہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ + دوسرے نصف کرہ کی خمیدہ سطح کا رقبہ سایہ–CAS

جہاں TSA اور CSA بالترتیب کل سطحی رقبہ اور خمیدہ سطح کے رقبہ کو ظاہر کرتے ہیں۔

آیئے ہم ایک دوسری صورت حال پر غور کرتے ہیں۔فرض کیجئے کہ ہم ایک مخروط اور ایک نصف کرّہ کو ایک ساتھ رکھ کر ایک کھلونا بناتے ہیں اب ہمیں کون کون سے قدم اٹھانے ہوں گے۔

پہلے ہم ایک مخروط اور نصف کرہ کو لیتے ہیں اور ان سطح رخوں کو ایک ساتھ رکھیں گے۔یقیناً ایسا کرنے کے لئے ہمیں مخروط کے ساتھ کا نصف قطر، نصف کرہ کے نصف قطر کے برابر لیا ہوگا تا کہ کھلونہ کی سطح مسطح ہو۔اس لئے اس میں استعمال ہوئے اقدامات شکل 13.5 میں دکھائے گئے ہیں۔

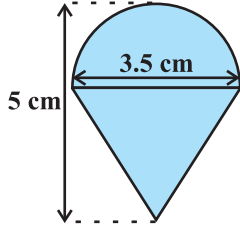
اپنی اس کوشش کے بعد ہمیں ایک خوبصورت کھلونہ ملتا ہے جس کا نچلہ حصہ گول ہے۔اب ہم اگر یہ معلوم کرنا چاہتے ہوں

شکل 13.5

گے اس کے چاروں طرف رنگ کرانے کا خرچ کتنا ہوگا۔تو ہمیں کیا جاننے کی ضرورت ہے؟ ہمیں کھلونہ کے سطحی رقبہ معلوم کرنے کی ضرورت ہے جو کہ نصف کرہ کا CSA اور مخروط کا CSA ہے۔

اس لئے ہم کہہ سکتے ہیں۔

کھلونہ TSA = نصف کرہ کا CSA + مخروط کا CSA

آیئے اب کچھ مثالیں لیتے ہیں۔

مثال 1: رشید کو اس کے یوم پیدائش پر ایک لٹّو تحفہ میں ملا۔اتفاقاً اس پر رنگ نہیں ہوا تھا۔وہ اپنے مومیا رنگوں سے اس کو رنگنا چاہتا ہو۔لٹّو ایک ایسے مخروط کی شکل کا ہے جس کا اوپری حصہ نصف کروی شکل کا ہے۔(شکل 13.6 دیکھئے)۔پورے لٹّو کی اونچائی 5 سینٹی میٹر اور اس کا نصف قطر 3.5 سینٹی میٹر ہے۔وہ رقبہ معلوم کیجئے جس پر اس کو رنگ کرنا ہے۔($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

شکل 13.6

حل: لٹو بالکل اس ہی شکل کا ہے جیسا ہم شکل 13.5 میں دیکھ چکے ہیں۔ تو ہم اسی نتیجہ کو استعمال کر سکتے ہیں جو ہم نے اوپر اخذ کیا تھا۔ یعنی

مخروط کا CSA + نصف کرّہ کا CSA = لٹو کا TSA

اب نصف کرہ کا CSA $= \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi r^2$

$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right)$ سینٹی میٹر

مزید نصف کروی حصہ کی اونچائی (نصف قطر)۔ لٹو کی اونچائی = مخروط کی اونچائی ہے

$= \left(5 - \frac{3.5}{2}\right)$ سینٹی میٹر = 3.25 سینٹی میٹر

اس لئے مخروط کی ترچھی اونچائی $= \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2}$ سینٹی میٹر = 3.7 سینٹی میٹر تقریباً

اس لئے مخروط کا CSA $= \pi r l = \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right)$ مربع سینٹی میٹر

اس سے لٹو کا سطحی رقبہ معلوم ہوتا ہے۔

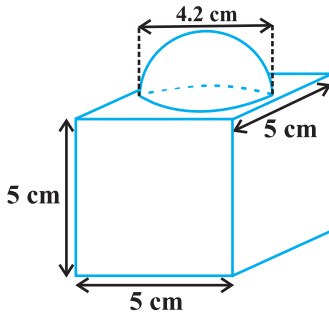
$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right)$ مربع سینٹی میٹر + $\left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right)$ مربع سینٹی میٹر

$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2}(3.5 + 3.7)$ مربع سینٹی میٹر تقریباً

$= \frac{11}{2} \times (3.5 + 3.7)$ مربع سینٹی میٹر = 39.6 مربع سینٹی میٹر

آپ یہ بات نوٹ کر سکتے ہیں کہ لٹّو کا کل سطحی رقبہ مخروط اور نصف کرہ کے کل سطحی رقبہ کے حاصل جمع کے برابر نہیں ہے۔

شکل 13.7

مثال 2: ایک سجاوٹی بلاک جیسا کہ شکل 13.7 میں دکھا گیا ہے دو ٹھوسوں سے مل کر بنا ہے ایک مکعب اور ایک نصف کرہ، بلاک کا قاعدہ 5

سینٹی میٹر ضلع والا ایک مکعب ہے اور اس کے اوپر فکس ہوئے نصف کرہ کا قطر 4.2 سینٹی میٹر ہے۔ بلاک کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

حل: مکعب کا TSA $= 6 \times (\text{ضلع})^2 = 6 \times 5 \times 5$ مربع سینٹی میٹر $= 160$ مربع سینٹی میٹر

نوٹ کیجیے کہ مکعب کا وہ حصہ جہاں پر نصف کرہ جڑا ہوا ہے، سطحی رقبہ میں شامل نہیں ہوگا اس لئے نصف کرہ کے قاعدہ کا رقبہ۔

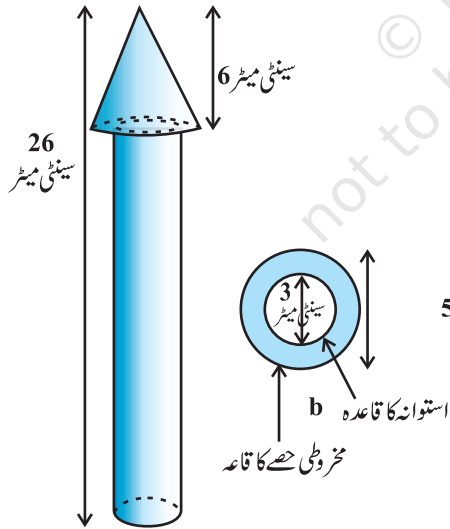
بلاک کا سطحی رقبہ = مکعب کا TSA + نصف کرہ کا CS

$= 150 - \pi r^2 + 2\pi r^2$ مربع سینٹی میٹر

$= (150 + \pi r^2)$ مربع سینٹی میٹر

$= 150$ مربع سینٹی میٹر $+ \left(\frac{22}{7} \times \frac{4.2}{2} \times \frac{4.2}{2}\right)$ مربع سینٹی میٹر

$= (150 + 13.86)$ مربع سینٹی میٹر

$= 163.86$ مربع سینٹی میٹر

مثال 3: ایک لکڑی کا بنا ہوا کھلونہ راکٹ ایک ایسے استوانہ کی شکل کا ہے جس کا اوپری حصہ مخروطی ہے جیسا کہ شکل 13.8 میں دکھایا گیا ہے پورے راکٹ کی اونچائی 26 سینٹی میٹر ہے۔ جب کہ مخروطی حصہ کی اونچائی 6 سینٹی میٹر ہے مخروطی حصہ کے قاعدہ کا قطر 5 سینٹی میٹر ہے جب کہ استوانہ کے قاعدہ کا قطر 3 سینٹی میٹر ہے اگر مخروطی حصہ کو نارنگی رنگ کرنا ہے اور استوانی حصہ کو پیلا تو وہ رقبہ معلوم کیجیے جہاں یہ دونوں رنگ ہوتے ہیں۔

6 سینٹی میٹر
26 سینٹی میٹر
3 سینٹی میٹر
5
b
استوانہ کا قاعدہ
مخروطی حصے کا قاعہ

شکل 13.8

حل: مخروط کے نصف قطر کو r ترچھی اونچائی کو P سے مخروط کی اونچائی کو h' سے، استوانہ کے نصف قطر کو r' اور استوانہ کی اونچائی کو h' سے ظاہر کیجیے۔

تب $r' = 1.5$ سینٹی میٹر، $h' = 26 - 6 = 20$ سینٹی میٹر

اور $r = 2.5$ سینٹی میٹر $h = 6$

$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2.5^2 + 6^2}$ سینٹی میٹر $= 6.5$ سینٹی میٹر

یہاں مخروطی حصہ کا دائری قاعدہ ہے جو استوانہ پر رکھا ہوا ہے۔لیکن مخروط کا قاعدہ استوانہ کے قاعدہ سے بڑا ہے۔اس لئے مخروط کے قاعدہ کا کچھ حصہ ہی رنگ کرنا ہے۔

اس لئے فاصلہ بڑھائیں استوانہ کے قاعدہ کا رقبہ۔ مخروط کے قاعدہ کا رقبہ + مخروط کا CSA= جہاں نارنگی رنگ ہونا ہے وہ رقبہ

$= \pi r l + pr^2 \times \pi(r')^2$

$= \pi[(2.5\times6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2]$ مربع سینٹی میٹر

$= \pi[20.25]\ cm^2 = 3.14 \times 20.25$ مربع سینٹی میٹر

$= 63.585\ cm^2$

اب استوانہ کے ایک قاعدہ کا رقبہ + استوانہ کا CSA= وہ رقبہ جہاں پیلا رنگ ہونا ہے

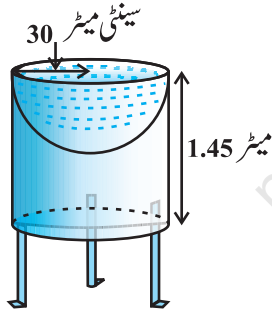
$= 2\pi r' h' + \pi(r')^2$

$= \pi r'\ (2h' + r')$

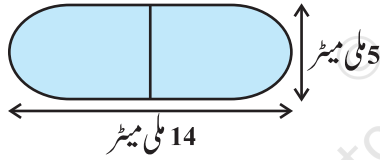
$= (3.14\times1.5)\ (2\times20+1.5)$ مربع سینٹی میٹر

$= 4.71\times41.5$ مربع سینٹی میٹر

$= 195.465$ مربع سینٹی میٹر

مثال 4: مینک نے اپنے باغ کے لئے ایک ایسا چڑیوں کے نہانے کا تالاب بنایا جو استوانہ کی شکل کا ہے جس کے ایک سرے پر نصف کروی ڈھال ہے۔(شکل 13.9 دیکھئے) استوانہ کی اونچائی 1.45 سینٹی میٹر ہے اور اس کا نصف قطر 30 سینٹی میٹر ہے۔ چڑیوں کے نہانے کا تالاب کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

شکل 13.9

حل: مان لیجئے استوانہ کی اونچائی اور استوانہ اور نصف کرہ کا مشترک نصف قطر r ہے تب

نصف کرہ کا CSA + استوانہ کا CSA = چڑیوں کے نہانے کا تالاب کا کل سطحی رقبہ TSA

$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30(145 + 30)$ مربع سینٹی میٹر

$= 33000\ cm^2 = 3.3$ مربع میٹر

مشق 13.1

جب تک کچھ اور نہ کہا جائے $\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے

1۔ دو مکعب جن میں ہر ایک کا حجم 64 سینٹی میٹر ہے۔سروں سے ملا دئے گئے ہیں۔نتیجہ میں ملے مکعب نما کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

2۔ ایک برتن ایک کھوکھلے نصف کرہ کی شکل کا ہے جس کے اوپر ایک کھوکھلا استوانہ رکھا ہوا ہے۔نصف کرہ کا قطر 14 سینٹی میٹر اور پورے برتن کی اونچائی 13 سینٹی میٹر ہے۔برتن کی اندرونی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

3۔ ایک کھلونہ مخروط کی شکل کا ہے جس کا اوپری حصہ نصف کروی ہے جس کا نصف قطر وہی ہے جو مخروط کا ہے۔اگر مخروط کا نصف قطر 3.5 سینٹی میٹر ہو اور کھلونہ کی کل اونچائی 15.5 سینٹی میٹر ہو تو کھلونہ کی کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

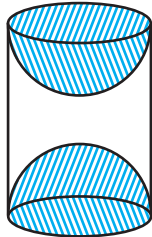
4۔ 7 سینٹی میٹر ضلع والے ایک مکعبی بلاک کا اوپری حصہ نصف کروی شکل ہے۔نصف کرہ کا بڑے قطر کیا ہو سکتا ہے؟ ٹھوس کا سطحی رقبہ معلوم کیجئے۔

5۔ ایک مکعبی لکڑی کے بلاک کے ایک سطح میں سے ایک نصف کروی ڈھال کاٹ لیا گیا ہے۔اگر نصف کرہ کا قطر مکعب کے ضلع کے برابر ہو تو باقی بچے ٹھوس کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

5 ملی میٹر
14 ملی میٹر

شکل 13.10

6۔ دوائی کا ایک کیپسول ایک ایسے استوانہ کی شکل کا ہے جن کے دونوں سرے نصف کروی شکل کے ہیں۔(شکل 13.10 دیکھئے) پورے کیپسول کی لمبائی 14 ملی میٹر ہے اور کیپسول کا قطر 5 ملی میٹر تو اس کا سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

7۔ ایک ٹینٹ استوانہ کی شکل کا ہے جس کا اوپری حصہ مخروطی ہے۔اگر استوانہ والے حصہ کی اونچائی اور قطر بالترتیب 2.1 سینٹی میٹر اور 4 سینٹی میٹر ہے اور مخروطی حصہ کی ترچھی اونچائی 2.8 ہے تو ٹینٹ کو بنانے میں استعمال ہونے والے کینوس کا رقبہ معلوم کیجئے اور 500 روپے فی مربع میٹر کی شرح سے کینوس کا خرچ بھی معلوم کیجیے۔

نوٹ کیجئے کہ ٹینٹ کے قاعدہ پر کینوس نہیں لگا ہوتا)

شکل 13.11

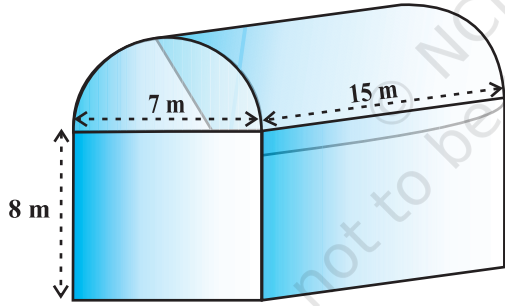
8۔ ایک ٹھوس استوانہ جس کی اونچائی 2.4 سینٹی میٹر اور قطر 1.4 سینٹی میٹر میں سے اس اونچائی اور قطر کا ایک مخروطی خلا نکالا گیا ہے۔

باقی بچے ٹھوس کا کل سطحی رقبہ نزدیکی مربع سینٹی میٹر میں معلوم کیجیے۔

9۔ لکڑی کی ایک شے ٹھوس استوانہ کے سروں میں نصف کرے نکال کر بنائی گئی ہے جیسا کہ شکل 13.11 میں دکھایا گیا۔ اگر استوانہ کی اونچائی 10 سینٹی میٹر اور اس کے قاعدہ کا نصف قطر 3.5 سینٹی میٹر۔ تو اس شے کا کل سطحی رقبہ معلوم کیجیے۔

13.3 ٹھوس اشیا کے اجماع کا حجم

پچھلے سیکشن میں ہم نے یہ بحث کی کہ دو بنیادی ٹھوس اشیا کے اجماع سے بنے ٹھوس کا سطحی رقبہ کیسے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ یہاں ہم دیکھیں گے کہ ان کا حجم کیسے معلوم کیا جائے گا۔ یہ بات نوٹ کی ہوگی کہ سطحی رقبہ معلوم کرتے وقت ہم نے دونوں ٹھوس اشیاء کے سطحی رقبہ کو جمع نہیں کیا تھا۔ کیونکہ ان کو ملاتے وقت سطحی رقبہ کا کچھ حصہ غائب ہو گیا تھا۔ لیکن جب ہم ان کا حجم معلوم کریں گے تو ایسا نہیں ہوگا۔ دو بنیادی ٹھوس اشیا کو ملا کر بنے ٹھوس کا حجم اصل ان دونوں کا ٹھوس اشیا کے حجم کے حاصل جمع کے برابر ہوگا۔ جیسے کہ ہم مندرجہ ذیل مثال میں دیکھتے ہیں۔

مثال 5: شانتا ایک انڈسٹری چلاتی ہے جو ایک ایسے شیڈ کے اندر ہے جس کی شکل ایک ایسے مکعب نما کی ہے۔ جس کا اوپری حصہ نصف استوانہ شکل ہے (شکل 13.12 دیکھئے)۔ اگر شیڈ کے قاعدہ کے ابعاد 15 سینٹی میٹر × 7 سینٹی میٹر ہیں اور مکعب نما والے حصہ کی اونچائی 8 سینٹی میٹر ہے۔ تو اس شیڈ میں جتنی ہوا ہو سکتی ہے اس کا حجم معلوم کیجیے۔ مزید فرض کیجیے اس شیڈ کے اندر لگی مشینری 300 مکعب میٹر جگہ گھیرتی ہے اور وہاں 20 کارکن ہیں اور ان میں سے ہر شخص 0.08 مکعب میٹر جگہ گھیرتا ہے تب شیڈ میں کتنی ہوا ہوگی۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

شکل 13.12

حل: شیڈ کے اندر ہوا کا حجم (جب وہاں کوئی ملازم اور مشینری نہ ہو) مکعب نما کے اندر موجود ہوا اور نصف استوانہ میں موجود ہوا کا حاصل جمع ہے۔

اب مکعب نما کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب 15 سینٹی میٹر، 7 سینٹی میٹر اور 8 سینٹی میٹر ہے۔ مزید نصف استوانہ کا قطر 7

سینٹی میٹر ہے۔ اور اس کی اونچائی 15 سینٹی میٹر۔

مسئلہ مطلوبہ حجم ہے کعب نما کا حجم + استوانہ کا حجم × $\frac{1}{2}$

مکعب میٹر 1128.75 مکعب میٹر $= \left[15 \times 7 \times 8 + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 15\right]$

آگے مشینری کے ذریعے گھیری گئی کل جگہ مکعب میٹر 300

اور 20 ملازموں کے ذریعے گھیری گئی کل جگہ مکعب میٹر $20 \times 0.08 = 1.6$ مکعب میٹر

اس لئے ہوا کا حجم جب وہاں مشینری اور ملازم ہوں مکعب میٹر $=1128.75-(300.00+1.60) = 827.15$

مثال 6: ایک جوس فروش اپنے گاہکوں کو شکل 13.13 میں دکھائے گئے گلاسوں میں جوس دیتا ہے۔ استوانہ گلاس کا اندرونی قطر 5 سینٹی میٹر ہے۔ لیکن گلاس کے نچلے حصہ میں نصف کروی شکل میں اٹھا ہوا ہے۔ جس کی وجہ سے گلاس کی گنجائش کم ہو جاتی ہے۔ اگر گلاس کی اونچائی 10 سینٹی میٹر تھی تو اس کی بہ ظاہری اور اصل گنجائش معلوم کیجئے۔ ($\pi=3.14$ لیجیے)

شکل 13.13

حل: کیونکہ گلاس کا اندرونی قطر = 5 سینٹی میٹر اور اونچائی 10 سینٹی میٹر

تو بہ ظاہر گلاس کی گنجائش = $\pi r^2 h$

مکعب سینٹی میٹر 196.25 = مکعب میٹر $=3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 10$

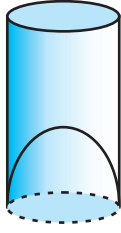
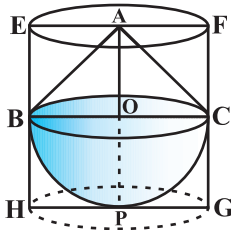
لیکن گلاس کی اصل گنجائش کم ہوگی کیونکہ اس کے قاعدہ میں ایک نصف کرہ اٹھا ہوا ہے

یعنی یہ $\frac{2}{3}\pi r^3$ کم ہوگی مکعب میٹر 32.71 = مکعب میٹر $= \frac{2}{3} \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 2.5$

شکل 13.14

اس لئے فاصلہ بڑھائیں نصف کرہ کا حجم۔ گلاس کی بہ ظاہری گنجائش = گلاس کی اصل گنجائش

مکعب میٹر 163.54 = میٹر $(196.25-32.71) =$

مثال 7: ایک ٹھوس کھلونا کی شکل کا ہے جس کا نچلا حصہ نصف کروی شکل کا

ہے۔مخروط کی اونچائی 2 سینٹی میٹر ہے اور قاعدہ کا قطر 4 سینٹی میٹر ہے۔کھلونا کا حجم معلوم کیجیے اگر ایک قائم دائری کا استوانہ اس کھلونے کو محصور کرتا ہے۔کھلونا اور استوانہ کے حجم کا فرق معلوم کیجیے۔(π=3.14 لیجیے)

حل: مان لیجیے BPC ایک نصف کرہ ہے اور ABC ایک مخروط جو نصف کرہ کے قاعدہ پر کھڑا ہوا ہے۔(13.14 دیکھئے) نصف کرہ (اور مخروط) کا نصف قطر OD = $\frac{1}{2} \times 4$ سینٹی میٹر = 2 سینٹی میٹر

اس لیے کھلونا کا حجم = $\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \left[\frac{2}{3} \times 3.14 \times (2)^3 + \frac{1}{3} \times 3.14 \times (2)^2 \times 2\right]$ مکعب سینٹی میٹر = 25.12 مکعب سینٹی میٹر

اب مان لیجیے قائم دائری استوانہ EFGH دیے ہوئے ٹھوس کو محصور کرتا ہے۔تو قائم داری استوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر ہے۔
HP = BO = 2 سینٹی میٹر = اور اس کی اونچائی ہے۔
EH + AD + OP = (2+2) سینٹی میٹر = 4 سینٹی میٹر

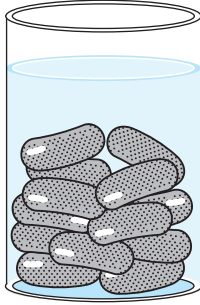
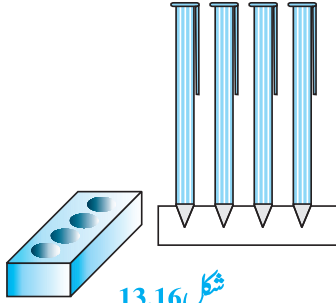
اس لیے مطلوبہ حجم ہے = قائم دائری کا استوانہ کا حجم – کھلونا کا حجم
$= (3.14 \times 2^2 \times 4 - 25.12)$ مکعب سینٹی میٹر = 25.12 مکعب سینٹی میٹر

اس طرح سے مطلوبہ حجموں میں فرق مکعب سینٹی میٹر = 25.12

مشق 13.2

جب تک کچھ اور نہ کہا جائے $\pi = \frac{22}{7}$

1۔ ایک ٹھوس ایسے مخروط کی شکل کا ہے جو نصف کرہ پر کھڑا ہے۔دونوں کے نصف قطر 1 سینٹی میٹر کے برابر ہے۔اور مخروط کی اونچائی اس کے نصف قطر کے برابر ہے۔ π کی شکل میں ٹھوس کا حجم معلوم کیجیے۔

2۔ انجینئرنگ کے ایک طالب علم راحیل سے ایک ایسا ماڈل بنانے کو کہا گیا جو استوانہ کی شکل کا ہے جس کے دونوں سروں پر المونیم کی پتلی شیٹ کے مخروط جڑے ہوتے ہیں۔اس ماڈل کا قطر 3 سینٹی میٹر اور لمبائی 12 سینٹی میٹر ہے۔اگر ہر ایک مخروط کی اونچائی 2 سینٹی میٹر ہے۔تو راحیل کے ذریعے بنے اس ماڈل میں ہوا کا حجم معلوم کیجیے (یہ مانتے ہوئے کہ ماڈل کی اندرونی اور باہری ابعاد تقریباً یکساں ہیں)۔

شکل 13.15

شکل 13.16

3۔ ایک گلاب جامن میں اس کے حجم کا 30% چینی کا شیرہ ہوتا ہے۔ معلوم کیجیے کہ 45 گلاب جامن میں تقریباً کتنا شیرہ ہوگا۔ جب کہ اس میں ہر ایک کی شکل ایک استوانہ جن کے سرے نصف کرہ شکل کے ہیں، کی شکل کی جس کی لمبائی 5 سینٹی میٹر اور قطر 2.8 سینٹی میٹر شکل لکڑی کا 3.15 دیکھیے)۔

4۔ ایک لکڑی کا پین اسٹینڈ مکعب نما کی شکل کا ہے جس میں مخروطی شکل کے 4 خول ہیں جو پینوں کی گرفت کرتے ہیں۔ مکعب نما کے ابعاد سینٹی میٹر 15 × سینٹی میٹر 15 × سینٹی میٹر 3.5 ہیں اور ہر ایک خول (سوراخ) کا نصف قطر 0.5 سینٹی میٹر اور گہرائی 1.4 سینٹی میٹر ہے۔ پورے اسٹینڈ میں لگی ہوئی لکڑی کا حجم معلوم کیجیے۔ (شکل 13.16 دیکھیے)۔

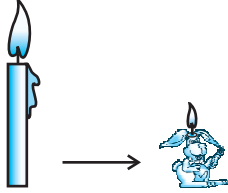
5۔ ایک برتن الٹے مخروط کی طرح ہے۔ اس کی اونچائی 8 سینٹی میٹر اور اوپر Top کا نصف قطر، جو کھلا ہوا ہے، 5 سینٹی میٹر ہے۔ یہ کنارے تک پانی سے بھرا ہوا ہے۔ جب سیسہ کی گولیاں جو کرہ کی شکل کی ہیں جس میں ہر ایک کا نصف قطر 0.5 سینٹی میٹر ہے۔ برتن میں ڈالی جاتی ہیں تو ایک چوتھائی پانی بہہ جاتا ہے۔ اس میں ڈالی گئی سیسہ کی گولیوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

6۔ ایک ٹھوس لوہے کا کھمبا 20 سینٹی میٹر اونچائی تک ایک استوانہ کی شکل کا ہے جس قاعدہ r کا قطر 24 سینٹی میٹر ہے۔ اس کے اوپر ایک اور استوانہ رکھا ہوا ہے جس کی اونچائی 60 سینٹی میٹر اور نصف قطر 8 سینٹی میٹر ہے۔ کھمبے کی کمیت معلوم کیجیے۔ اگر مکعب سینٹی میٹر 1 لوہے کی تقریباً کمیت 8 گرام ہے۔ ($\pi=3.14$ لیجیے)

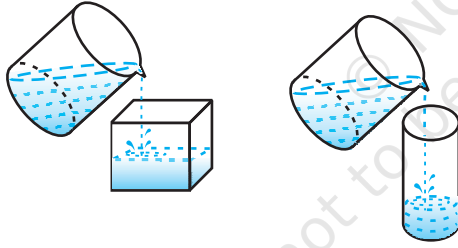
7۔ ایک ٹھوس جس میں 120 سینٹی میٹر اونچائی کا ایک قائم دائری مخروط ہے جس کا نصف قطر 60 سینٹی میٹر ہے جو 60 سینٹی میٹر نصف قطر والے ایک کرہ پر کھڑا ہے۔ کو قائم زاویہ پر ایک قام دائری استوانہ، جو پانی سے بھرا ہوا، میں اس طرح رکھا جاتا ہے کہ یہ اس کے نچلے حصہ کو چھوتا ہے۔ استوانہ میں باقی بچے پانی کا حجم معلوم کیجیے۔ اگر استوانہ کا نصف قطر 60 سینٹی میٹر اور اونچائی 180 سینٹی میٹر ہو۔

8۔ ایک کروی شیشے کے برتن کی گردن استوانہ کی شکل کی ہے۔ جس لمبائی 8 سینٹی میٹر اور قطر 2 سینٹی میٹر ہے۔ کروی حصہ کا قطر 8.5 سینٹی میٹر ہے۔ اس میں جتنا پانی آ سکتا اس کی پیائش کر کے ایک بچہ اس کا حجم 345 مکعب سینٹی میٹر بتاتا ہے جانچ کیجیے

کہ آیا وہ بچّہ سچ بول رہا ہے۔ اوپر کی پیمائش برتن کے اندر کی لی جائے۔($\pi=3.14$)

13.4 ٹھوس اشیاء کا ایک شکل سے دوسری شکل میں تبدیل ہونا

ہمیں یقین ہے کہ آپ نے موم بتّی ضرور دیکھی ہوگی۔ عمومی طور پر استوانہ کی شکل کی ہوتی ہیں۔ آپ نے یہ بھی دیکھا ہوگا کہ موم بتیاں جانور کی شکل کی بھی ہوتی ہیں۔(13.17 دیکھیے)

شکل 13.17

یہ کس طرح بنائی جاتی ہیں؟ اگر آپ کو کسی شکل کی موم بتی چاہیے تو آپ موم کو کسی دھات کے برتن میں گرم کیجیے۔ جب تک کہ یہ پوری پوری طرح سے سیال نہ بن جائے۔ پھر آپ اس کو اس برتن میں ڈال دیں جس کی شکل ویسی ہو جیسی آپ موم بتی بنانا چاہتے ہیں۔ مثال کے طور پر: ٹھوس استوانہ کی شکل کی ایک موم بتّی لیجیے، اس کو پگھلائیے اور پگھلے ہوئے موم کو ایک خرگوش کی شکل والے سانچے میں ڈال دیں ٹھنڈا کرنے پر آپ کو خرگوش کی شکل میں ایک موم بتّی ملے گی۔ نئی موم بتّی کا حجم وہی ہوگا جو پہلی موم بتّی کا تھا۔ یہی بات ہے جو ہمیں یاد رکھنا ہے جب ہم کس شے کو دوسرے شکل کی شے میں تبدیل کرتے ہیں۔

یا جب کسی سیال کو جو کسی خاص شکل کے برتن میں سے اس کو دوسری شکل والے برتن میں ڈالا جاتا ہے۔ جیسے آپ شکل 13.18 میں دیکھ سکتے ہیں جس پر بحث کی گئی اس کو سمجھنے کے لئے آیئے کچھ مثالیں حل کرتے ہیں۔

شکل 13.18

مثال 8: ایک مخروط جس کی اونچائی 24 سینٹی میٹر ہے اور قاعدہ کا نصف قطر 6 سینٹی میٹر چکنی مٹّی سے بنا ہے۔ ایک بچّہ اس کو ایک کرہ کی شکل دے دیتا ہے: کرہ کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

حل: مخروط کا حجم = $\frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$ مکعب سینٹی میٹر

اگر کرہ کا نصف قطر r ہے تب اس کا حجم = $\frac{4}{3}\pi r^3$

کیونکہ مٹّی کا حجم مخروط اور کرہ کی شکل میں یکساں رہتا ہے اس لئے ہمارے پاس ہے

$$\frac{4}{3}\times\pi\times r^3=\frac{1}{3}\times\pi\times6\times6\times24$$

$$r^3=3\times3\times24=3^3\times2^3$$

$$r=3\times2=6$$

اس لئے کرہ کا نصف قطر ہے 6 سینٹی میٹر

مثال 9: سیلوی کے گھر پر استوانہ کی شکل کا ایک ٹینک ہے۔ اس کو ایک Sump (زیر زمین ٹینک) جس کی شکل کعب نما کی ہے، میں پانی پمپ کر کے بھرا جاتا ہے۔ جو Sump کی ابعاد سینٹی میٹر 95×1.44 میٹر ×1.57 میٹر ہیں۔ اوپر والے ٹینک کا نصف قطر 60 سینٹی میٹر اور اونچائی 95 سینٹی میٹر ہے۔ Sump میں بچے ہوئے پانی کی اونچائی کتنی ہوگی اگر اوپر والا ٹینک پوری طرح بھر گیا ہو اور Sump پہلے کنارے تک بھرا ہوا تھا۔ ٹینک کی اور Sump کی گنجائش کا موازنہ بھی کیجیے۔

حل: اوپر رکھے ہوئے ٹینک کے پانی کا حجم برابر ہے Sump میں سے نکالے گئے پانی کے حجم کے برابر

اب اوپر رکھے ہوئے ٹینک میں پانی کا حجم (استوانہ کا حجم) $=\pi r^2h$

$=3.14\times0.6\times0.6\times0.95$ مکعب میٹر

مکعب میٹر $=l\times b\times h=1.57\times1.44\times0.95$ Sump جب پوری طرح بھرا ہوا تھا تو اس کا حجم تھا

اوپر والے ٹینک کو بھرنے کے بعد Sump میں باقی بچے پانی کا حجم

$=[(1.57\times1.44\times0.95)-(3.14\times0.6\times0.6\times0.95)]\ m^3=(1.57\times0.6\times0.6\times0.95\times2)$ مکعب میٹر

Sump میں باقی بچے پانی کا حجم = اس لئے Sump میں باقی بچے پانی کی اونچائی ہے $l\times b$

$$=\frac{1.57\times0.6\times0.6\times0.95\times2}{1.57\times1.44}$$ میٹر

$=0.475\ m=47.5$ سینٹی میٹر

$$\frac{\text{ٹینک کی گنجائش}}{\text{Sump کی گنجائش}}=\frac{3.14\times0.6\times0.6\times0.95}{1.57\times1.44\times0.95}=\frac{1}{2}$$

اس لئے ٹینک کی گنجائش، Sump کی گنجائش کی آدھی ہے۔

مثال 10: 1 سینٹی میٹر قطر والی تانبہ کی ایک چھڑ کی لمبائی 8 سینٹی میٹر ہے۔ اس کو پگھلا کر یکساں موٹائی کا ایک 18 سینٹی میٹر لمبا

تار بنایا گیا۔ تار کی موٹائی معلوم کیجیے۔

حل: چھڑ کا حجم $= \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times$ مکعب میٹر $= 2\pi$ مکعب میٹر

اسی حجم کے تار کی نئی لمبائی = 18 میٹر، = 1800 سینٹی میٹر

اگر r، تار کے ترچھی کاٹ کا نصف قطر ہے تب اس کا حجم مکعب سینٹی میٹر $\pi \times r^2 \times 1800$

اس لئے $\pi r^2 \times 1800 = 2\pi$

یعنی $r^2 = \frac{1}{900}$، $r = \frac{1}{30}$

اس لئے تار کے ترچھی کاٹ کا نصف قطر ہے تب اس کا حجم ہے۔ $\frac{1}{15}$ یعنی 0.67 سینٹی میٹر تقریباً۔

مثال 11: ایک نصف کروی ٹینک جو پانی سے بھرا ہوا ہے اس کو ایک پائپ سے $3\frac{4}{7}$ لیٹر فی سیکنڈ کی شرح سے خالی کیا جاتا ہے۔ آدھے ٹینک کو خالی کرنے میں اس کو کتنا وقت لگے گا اگر اس کا قطر 3 میٹر کا ہے۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

حل: نصف کروی ٹینک کا نصف قطر $= \frac{3}{2}$ m

ٹینک کا حجم $= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{3}{2}\right)^3$ مکعب میٹر $= \frac{99}{14}$ مکعب میٹر

خالی کئے جانے والے پانی کا حجم $= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{3}{2}\right)^3$ مکعب میٹر $= \frac{99}{28} \times 1000$ اس لئے لیٹر

$= \frac{99000}{28}$ لیٹر کیونکہ $\frac{25}{7} =$ لیٹر پانی ایک سیکنڈ میں خالی ہوتا ہے، اس لئے $\frac{99000}{28}$ لیٹر پانی خالی ہوگا

$\frac{99000}{28} \times \frac{7}{25}$ سیکنڈ یعنی 16.5 منٹ میں

مشق 13.3

($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے جب تک کے کچھ اور نہ کہا جائے)۔

1۔ دھات کے ایک کرہ کا نصف قطر 4.2 سینٹی میٹر ہے۔ اس کو پگھلا کر 6 سینٹی میٹر نصف قطر کا ایک استوانہ دوبارہ ڈھالا گیا استوانہ کی اونچائی معلوم کیجیے۔

2۔ 6 سینٹی میٹر ,8 سینٹی میٹر اور 10 سینٹی میٹر نصف قطر والے تین دھات کے کروں کو پگھلا کر ایک ٹھوس کرہ بنایا گیا۔ نتیجہ میں ملے کرہ کا نصف قطر معلوم کیجیے۔

3۔ 20 میٹر گہرے ایک کنویں کو، جس کا قطر 7 میٹر ہے کھودا گیا۔ اس میں سے نکلی مٹّی کو اس کے چاروں طرف پھیلا کر 14 میٹر×22 میٹر کا ایک پلیٹ فارم بنایا گیا۔ پلیٹ فارم کی اونچائی معلوم کیجیے۔

4۔ ایک کنواں جس کا قطر 3 میٹر ہے۔ 14 میٹر کی گہرائی تک کھودا گیا۔ اس کے اندر سے نکلی مٹی کو اس کے چاروں طرف پھیلا کر 14 میٹر اونچی گول مینڈ بنائی گئی مینڈ کی اونچائی معلوم کیجیے۔

5۔ ایک قائم دائری استوانہ کی شکل کے ایک مضروف کا قطر 12 سینٹی میٹر اور اونچائی 15 سینٹی میٹر ہے۔ آئس کریم سے بھرا ہوا ہے، آئس کریم کو 12 سینٹی میٹر اونچائی اور 6 سینٹی میٹر قطر والے مخروط جن کا اوپر حصہ نصف کرہ کی شکل کا ہے۔ اس میں بھرا جاتا ہے۔ ایسے مخروط کی تعداد بتائیے جو آئس کریم سے بھرے ہوئے ہوں۔

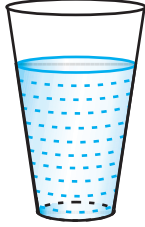
6۔ 1.75 سینٹی میٹر قطر اور 2 ملی میٹر موٹائی والے چاندی کے کتنے سکّوں کو پگھلا کر سینٹی میٹر 3.5× سینٹی میٹر 10×15.5 ابعاد والے کعب نما کو بنایا جا سکتا ہے۔

7۔ ایک استوانہ نما بالٹی جس کی اونچائی 32 سینٹی میٹر اور قاعدہ کا نصف قطر 18 سینٹی میٹر ہے۔ ریت سے بھری ہوئی ہے۔ اس بالٹی کو ریت کو زمین پر ڈال کر ایک مخروطی ڈھیر بنا دیا جاتا ہے۔ اگر مخروطی ڈھیر کی اونچائی 24 سینٹی میٹر ہے تو ڈھیر کا نصف قطر اور ترچھی اونچائی معلوم کیجیے۔

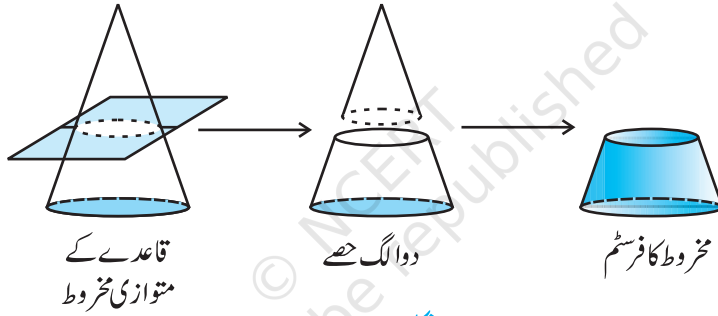
8۔ 6 میٹر چوڑائی اور 1.5 میٹر گہری ایک کینال میں پانی 10 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے بہہ رہا ہے۔ 30 منٹ میں یہ کتنے رقبہ کی سینچائی کرے گا اگر اس کے لئے 8 سینٹی میٹر اونچائی تک پانی ہونا ضروری ہو۔

9۔ ایک کسان، ایک پائپ، جس کا اندرونی قطر 20 سینٹی میٹر ہے، کو نہر اور ایک استوانہ شکل کے ٹینک، جو اس کے کھیت میں ہے، سے منسلک کر دیتا ہے، ٹینک کا قطر 10 میٹر اور گہرائی 2 میٹر ہے۔ اگر پانی پائپ سے 3 کلومیٹر فی گھنٹہ کی شرح سے بہتا ہے تو وہ ٹینک کو کتنے وقت میں پورا بھرے گا۔

13.5 مخروط کا فرسٹم

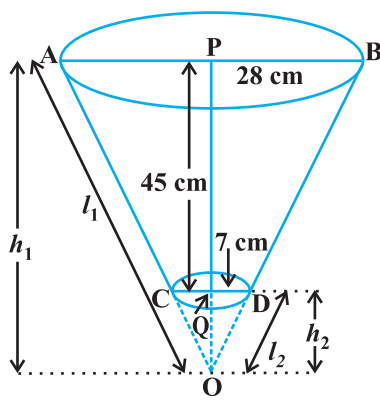
سیکشن 13.2 میں ہم نے ایسی اشیا کہ مشاہدہ کیا تھا جو دو بنیادی ٹھوسوں سے مل کر وجود میں آئی تھیں آیئے اب کچھ مختلف کرتے ہیں۔ ہم ایک قائم دائری مخروط لیتے ہیں اور اس کا ایک حصہ اس سے الگ کر دیتے ہیں بہت سے طریقوں سے

ہم ایسا کر سکتے ہیں۔ لیکن ایک مخصوص طریقہ یہ ہے کہ کسی مستوی سے دیئے ہوئے مخروط کے قاعدہ کے متوازی کاٹ کر ایک چھوٹا مخروط الگ کریں۔ آپ نے مشاہدہ کیا ہوگا کہ پانی پینے کے گلاس یا بالٹی اسی شکل کی ہوتی ہے (شکل 13.19 دیکھیے)۔

شکل 13.19

مشغلہ 1: کچھ مٹی یا اس سے ملتا جلتا کچھ مٹریل (جیسے پلاسٹک وغیرہ) لیجئے اور ایک مخروط بنائیے۔ اس کو ایک چاقو سے اس کے قاعدہ کے متوازی کاٹئے۔ چھوٹے مخروط کو الگ کر دیجئے۔ آپ کے پاس کیا بچتا ہے؟ آپ

شکل 13.20

کے پاس ایک ٹھوس بچتا ہے جسے مخروط کا فرسٹم کہتے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس کے دو دائری سرے ہوتے ہیں۔ جن کے نصف قطر مختلف ہوتے ہیں۔ اس لئے اگر کسی دئے ہوئے مخروط کو کسی چاقو سے اس کے قاعدہ کے متوازی کاٹا جاتا ہے (شکل 13.20 دیکھئے)۔ اور اس کے ایک طرف بنے چھوٹے مخروط کو الگ کر دیا جاتا ہے۔ تو باقی بچے حصہ کو مخروط کا فرسٹم کہتے ہیں۔ ہم کسی مخروط کے فرسٹم کا سطحی رقبہ اور حجم کیسے معلوم کر سکتے ہیں؟ آیئے اس کی ایک مثال سے سمجھنے کی کوشش کرتے ہیں۔

مثال 12: 45 میٹر اونچے مخروط کے فرسٹم کے سروں کے نصف قطر 28 میٹر اور 7 سینٹی میٹر ہیں (شکل 13.21 دیکھیے) اس کا حجم، خمیدہ سطح کا رقبہ اور کل سطح کا رقبہ معلوم کیجیے ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

حل: ایک فرسٹم کو دو قائم دائری مخروطوں OAB اور OCD کے فرق کے طور پر دیکھ سکتے ہیں (شکل 13.21 دیکھیے) مان لیجیے مخروط OAB کی اونچائی (سینٹی میٹر میں) h_1 اور اس کی ترچھی اونچائی l_1 یعنی $OP = h_1$ اور $OA = OB = l_1$

شکل 13.21

مان لیجیے مخروط OCD کی اونچائی b_2 اور ترچھی اونچائی l_2 ہے، ہمارے پاس ہے سینٹی میٹر $r_1 = 7$ $r_1 = 18$

اور فرسٹم کی اونچائی سینٹی میٹر h=45، مزید $h_1 = 45 + h_2$ (1)

سب سے پہلے ہمیں مخروط OAB اور OCD کی اونچائیاں h_1 اور h_2 معلوم کرنی ہیں

کیونکہ OPB اور OQD مشابہ ہیں (کیونکہ؟) ہمارے پاس

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{28}{7} = \frac{4}{1} \qquad (2)$$

(1) اور (2) سے ہمیں ملتا ہے $h_2 = 15$ اور $h_1 = 60$

اب فرسٹم کا حجم = مخروط OAB کا حجم ـ مخروط OCD کا حجم

$$= \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{22}{7}\cdot(28)^2\cdot(60) - \frac{1}{3}\cdot\frac{22}{7}\cdot(7)^2\cdot(15)\right]$$ مکعب سینٹی میٹر = 48510 مکعب سینٹی میٹر

مخروطوں OCD اور OAB کی بالترتیب اونچائیاں l_1 اور l_2 ہیں

$l_2 = \sqrt{(7)^2 + (15)^2} = 16.55$ سینٹی میٹر (تقریباً)

$l_1 = \sqrt{(28)^2 + (60)^2} = 4\sqrt{(7)^2 + (15)^2} = 4 \times 16.55 = 66.20$ سینٹی میٹر

اس طرح سے فرسٹم کی خمیدہ سطح کا رقبہ (CSA) ہے = $\pi r_1 l_1 - \pi r_2 l_2$

$= \frac{22}{7}(28)(66.20) - \frac{22}{7}(7)(16.55) = 5461.5$ مربع سینٹی میٹر

اب فرسٹم کا کل سطحی رقبہ (TSA) ہے

$= \text{CSA} + \pi r_1^2 + \pi r^2$

$= 5461.5\text{cm}^2 + \frac{22}{7}(28)^2\text{ cm}^2 + \frac{22}{7}(7)^2\text{ cm}^2$ مربع سینٹی میٹر

$= 5461.5\text{cm}^2 + 2464\text{ cm}^2 + 154\text{ cm}^2 = 8079.5\text{cm}^2$ مربع سینٹی میٹر

مان لیجیے مخروط کے فرسٹم کی اونچائی h_1، ترچھی اونچائی l اور r_1 اور r_2۔ اس کے سروں کے نصف قطر ہیں $(r_1 > r_2)$۔ تب ہم

نیچے دیے گئے فارمولوں سے سیدھے اس کا حجم اور مکمل سطحی رقبہ معلوم کر سکتے ہیں۔

(i) مخروط کے فرسٹم کا حجم $= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

(ii) مخروط کے فرسٹم کی خمیدہ سطح کا رقبہ $\pi(r_1 + r_2)l$ جہاں $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

(iii) مخروط کے فرسٹم کا کل سطحی رقبہ $= \pi l(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$ جہاں $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$ ۔

ان فارمولوں کو ہم مثلث کی مشابہت سے اخذ کر سکتے ہیں لیکن ہم یہاں اس کو اخذ نہیں کر رہے

آیئے مثال 12 کو فارمولہ کی مدد سے حل کرتے ہیں۔

(i) فرسٹم کا حجم $= \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right)$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{22}{7} \cdot 45 \cdot \left[(28)^2 + (7)^2 + (28)(7)\right]$ مکعب سینٹی میٹر

$= 48510$ مکعب سینٹی میٹر

(ii) ہمارے پاس ہے مربع سینٹی میٹر $l = \sqrt{h^2 + \left(r_1 - r_2\right)^2} = \sqrt{(45)^2 + (28 - 7)^2}$

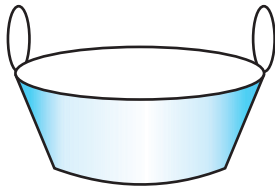
$= 3\sqrt{(15)^2 + (7)^2} = 49.65$ سینٹی میٹر

اس لئے فرسٹم کی خمیدہ سطح کا رقبہ ہے

$= \pi\left(r_1 + r_2\right)l = \frac{22}{7}(28 + 7)(49.65) = 5461.5$ مربع سینٹی میٹر

(iii) فرسٹم کا کل سطحی رقبہ $= \pi\left(r_1 + r_2\right)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$\left[5461.5 + \frac{22}{7}(28)^2 + \frac{22}{7}(7)^2\right]$ سینٹی میٹر2=8079.5 مربع سینٹی میٹر

آیئے کچھ مثالوں میں ان فارمولوں کا استعمال کرتے ہیں۔

شکل 13.22

مثال 13: ہنومپا اور اس کی بیوی گنگا گنّے کے رس سے گڑ بنا رہی ہیں انہوں نے گنّے کے رس کو گرم کر کے راب بنائی۔ اور اس کو فرسٹم کے سانچہ میں ڈال دیا جن کے دو دائری سروں کے قطر 30 سینٹی میٹر اور 35 سینٹی میٹر ہیں اور سانچہ کی اونچائی 14 سینٹی میٹر (شکل 13.22 دیکھئے) اگر ہر مکعب سینٹی میٹر راب کی کمیت 1.2 گرام

ہے تو سانچہ میں ڈالی گئی راب کی کیمت معلوم کیجئے ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

حل: کیونکہ سانچہ مخروط کے فرسٹم کی شکل کا ہے تو اس میں ڈالے گئے راب کا حجم (مقدار) ہے $= \frac{\pi}{3} h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

جہاں r_1 بڑے قاعدہ، اور r_2 چھوٹے قاعدہ کا نصف قطر ہے۔

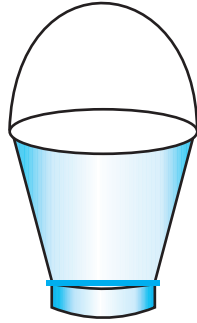
مکعب سینٹی میٹر $= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2 + \left(\frac{35}{2} \times \frac{30}{2}\right) \right]$ مکعب سینٹی میٹر 11641.7 =

یہ دیا ہوا ہے کہ 1 مکعب سینٹی میٹر راب کی کیمت 1.2g ہے اس لئے راب جس کو سانچے میں ڈالا گیا۔ اس کی کیمت ہے

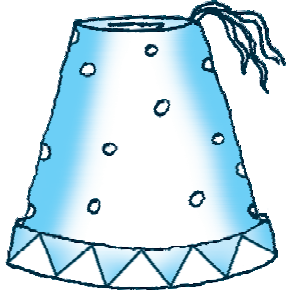
= گرام (11641.7×1.2)

= 13970.04 گرام = 13.97 کلوگرام = 14 کلوگرام (تقریباً)

شکل 13.23

مثال 14: ایک کھلی بالٹی مخروط کے فرسٹم کی شکل کی ہے۔ جو ایک دھات کی شیٹ کے بنے استوانہ قاعدہ پر ٹکی ہوئی ہے (شکل 13.23 دیکھئے) بالٹی کے دائری سروں کے نصف قطر بالترتیب 45 سینٹی میٹر اور 25 سینٹی میٹر ہیں اور بالٹی کی کل انتصابی اونچائی 40 سینٹی میٹر ہے۔ اور استوانہ قاعدہ کی اونچائی کی بالٹی کو بنانے میں استعمال ہونے والی شیٹ کا رقبہ معلوم کیجیے اگر اس ہینڈل کو اس میں شامل نہ کیا جائے بالٹی کے اندر جتنا پانی آتا ہے اس کا حجم بھی معلوم کیجئے۔ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

حل: بالٹی کی کل اونچائی = 40 سینٹی میٹر جس میں قاعدہ کی اونچائی بھی شامل ہے اس لئے مخروط کے فرسٹم کی اونچائی سینٹی میٹر (40-6) = 34 سینٹی میٹر، اس لئے

فرسٹم کی ترچھی اونچائی $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

جہاں $r_2 = 12.5$ سینٹی میٹر، $r_1 = 22.5$ اور سینٹی میٹر $h = 34$

اس لئے سینٹی میٹر $l = \sqrt{34^2 + (22.5 - 12.5)^2}$ سینٹی میٹر $= \sqrt{34^2 + 10^2} = 35.44$

دھات کی شیٹ کا کل رقبہ = مخروط کے فرسٹم کا CSA + دائری قاعدہ کا رقبہ + استوانہ قاعدہ کا CSA

$=[\pi\times 35.44\ (22.5+12.5)+\pi\times(12.5)^2+2\pi\times 12.5\times 6]$ مربع سینٹی میٹر

$=\frac{22}{7}(1240.4+156.25+150)$ مربع سینٹی میٹر

$=4860.9$ مربع سینٹی میٹر

بالٹی میں آنے والے پانی کا حجم (جو بالٹی کی گنجائش بھی کہلاتی ہے) $=\frac{\pi\times h}{3}\times(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)$

$=\frac{22}{7}\times\frac{34}{3}\times[(22.5)^2+(12.5)^2+22.5\times 12.5]$ مکعب سینٹی میٹر

$=\frac{22}{7}\times\frac{34}{3}\times 943.75=33615.48$ مکعب سینٹی میٹر $=33.62$ لیٹر (تقریباً)

مشق 13:4

جب تک کچھ اور نہ کہا جائے $\pi=\frac{22}{7}$ لیجیے۔

1۔ ایک پانی پینے کا گلاس مخروط کے فرسٹ کی شکل کا ہے جس کی اونچائی 14 سینٹی میٹر ہے اس کے دائری سروں کے قطر 4 سینٹی میٹر اور 2 سینٹی میٹر ہیں۔ گلاس کی گنجائش معلوم کیجیے۔

2۔ مخروط فرسٹم کی ترچھی اونچائی 4 سینٹی میٹر اور اس کے دائری سروں کے محیط 18 سینٹی میٹر اور 6 سینٹی میٹر ہیں فرسٹم کی خمیدہ سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

شکل 13.24

3۔ ایک ترکی ٹوپی مخروط کے فرسٹم کی شکل کی ہے (شکل 13.24 دیکھیے) اگر اس کے کھلے ہوئے حصہ کا نصف قطر 10 سینٹی میٹر اور اوپری قاعدہ کا نصف قطر 4 سینٹی میٹر اور ترچھی اونچائی 14 سینٹی میٹر ہے۔ اس ٹوپی کو بنانے میں استعمال ہونے والے میٹریل کا رقبہ معلوم کیجیے۔

4۔ ایک مضروف (برتن) جو اوپر سے کھلا ہوا ہے دھات کی ایک شیٹ سے بنا ہوا ہے اور جو مخروط کے فرسٹم کی شکل کا ہے جس کی اونچائی 16 سینٹی میٹر اور نچلے اور اوپری سروں کے نصف قطر بالترتیب 8 سینٹی میٹر اور 20 سینٹی میٹر ہیں 20 روپے فی لیٹر کی شرح سے اس مضروف (برتن) میں آنے والے دودھ کا خرچ معلوم کیجیے۔ جب کہ وہ پوری طرح سے دودھ سے بھرا ہوا ہو۔ 8 روپے فی 100 مکعب سینٹی میٹر کی شرح سے اس مضروف (برتن) کو بنانے میں استعمال ہوئی شیٹ کا خرچ بھی معلوم کیجئے۔ ($\pi=3.14$ لیجیے)

5۔ دھات کے لئے ایک قائم دائری مخروط جس کی اونچائی 20 سینٹی میٹر ہے اور اس کا انتصابی زاویہ $60°$ ہے، کو ٹھیک اس کی

اونچائی کے وسط سے اس کے قاعدہ کے متوازی ایک مستوی کاٹ کر دو حصوں میں منقسم کر دیا گیا۔ اس طرح سے ملے فرسٹم کو پگھلا کر $\frac{1}{16}$ سینٹی میٹر قطر کا ایک تار بنایا گیا۔ تار کی لمبائی معلوم کیجیے۔

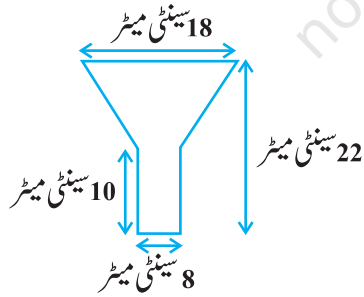
مشق 13.5 (اختیاری)

1۔ ایک استوانہ، جس کی لمبائی 12 سینٹی میٹر اور قطر 10 سینٹی میٹر کی خمیدہ سطح کو پوری طرح سے ڈھکنے کے لئے اس پر 3 ملی میٹر قطر والا تانبہ کا ایک تار لپیٹا گیا۔ تار کی لمبائی اور کمیت معلوم کیجیے یہ مانتے ہوئے کہ تانبہ کی کثافت 8.88 گرام فی مکعب سینٹی میٹر ہے۔

2۔ ایک قائم مثلث جس کے اضلاع (وتر کے علاوہ) 3 سینٹی میٹر اور 4 سینٹی میٹر ہیں، کو اس کے وتر کے گرد گھمایا گیا اس طرح سے بنے دوہرے مخروط کا حجم اور سطحی رقبہ معلوم کیجیے (جو مناسب لگے π کی وہی قدر لیجیے)۔

3۔ ایک ٹنکی جس کی داخلی (اندرونی) پیمائش 110 سینٹی میٹر × 120 سینٹی میٹر × 150 سینٹی میٹر ہے۔ اس میں 129600 مکعب سینٹی میٹر پانی ہے۔ اس کے اندر پورس کی اینٹیں جب تک رکھی گئیں جب تک کہ پانی کی ٹنکی میں کنارے تک نہیں آ جاتا۔ ہر اینٹ اپنے حجم کا $\frac{1}{17}$ پانی جذب کر لیتی ہے۔ اس میں کل کتنی اینٹیں رکھی جائیں کہ پانی اوپر تک بھرے نہ ہو۔ جب کہ ہر ایک اینٹ کی پیمائش 22.5 سینٹی میٹر × 7.5 سینٹی میٹر × 6.5 سینٹی میٹر؟

4۔ دئے ہوئے مہینہ کے 15 دنوں میں ایک ایک ندی کی وادی میں 10 سینٹی میٹر بارش ہو۔ (اگر وادی) کا رقبہ 7280 مربع کلو میٹر ہے۔ دکھائے کہ اس وادی میں کل بارش تین دریاؤں جن میں ہر ایک 1075 کلومیٹر لمبا 75 میٹر چوڑا اور 3 میٹر گہرا ہے میں موجود پانی کے حاصل جمع کے معادل ہے۔

شکل 13.25

5۔ تیل کا ایک قیف ٹن شیٹ کا بنا ہوا ہے۔ جس کا ایک حصہ استوانہ شکل کا ہے جس کی لمبائی 10 سینٹی میٹر ہے اور جو ایک مخروط کے فرسٹم سے جڑا ہوا ہے۔ اگر اس کی کل اونچائی 22 سینٹی میٹر اور استوانہ کا قطر 8 سینٹی میٹر اور قیف کے اوپری حصہ کا قطر 18 سینٹی میٹر ہو تو اس کو بنانے میں استعمال ہوئی ٹن شیٹ کا رقبہ معلوم کیجیے (شکل 13.25 دیکھیے)۔

6۔ سیکشن 13.5 میں دئے گئے مخروط کے فرسٹم کے کل سطح کے رقبہ اور خمیدہ سطح کے رقبہ کے فارمولہ کو اخذ کیجئے، اس میں علامتیں وہی ہونی چاہئیں جو اس میں دی گئی ہیں۔ یعنی (r_2, r_1, h, l) وغیرہ۔

7۔ سیکشن 13.5 میں دئے گئے مخروط کے فرسٹم کے حجم کا فارمولہ بتائیے۔ انہیں علامتوں کے ساتھ جو اس میں دی گئی ہیں۔ یعنی (r_2, r_1, h, l) وغیرہ۔

13.6 خلاصہ

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں

1۔ دو بنیادی ٹھوسوں جیسے، مکعب نما، مخروط، اسطوانہ، کرہ اور نصف کرہ سے ملا کر بنی نئی اشیا کا رقبہ معلوم کرنا۔

2۔ دو بنیادی ٹھوسوں، مکعب نما، مخروط، استوانی کرہ، نصف کرہ سے ملا کر بنے ٹھوسوں کا حجم معلوم کرنا۔

3۔ ایک قائم دائری مخروط دیا ہوا ہے۔ جس ایک مستوی سے اس کے قاعدہ کے متوازی کاٹا جاتا ہے۔ جب اس پر سے ایک چھوٹے مخروط کو علیحدہ کر دیا جاتا ہے تو نتیجہ میں ملا ٹھوس قائم دائری مخروط کا فرسٹم کہلاتا ہے۔

4۔ مخروط کے فرسٹم کے متعلق فارمولے۔

(i) مخروط کے فرسٹم کا حجم $= \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right)$

(ii) مخروط کے فرسٹم کی خمیدہ سطح کا رقبہ $\pi l\left(r_1 + r_2\right)$ جہاں $l = \sqrt{h^2 + \left(r_1 - r_2\right)^2}$

(iii) مخروط کے فرسٹم کا کل سطحی رقبہ $= \pi l\left(r_1 + r_2\right) + \pi\left(r_1^2 + r_2^2\right)$ جہاں h فرسٹم کی انتصابی اونچائی l فرسٹم کی ترچھی اونچائی، r_1 اور r_2 فرسٹم کے دو قاعدوں کے نصف قطر ہیں۔